

# 1 Kreuzprodukt

- $\lambda a \times b = \lambda(a \times b) = a \times \lambda b$
- $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$  und  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- $a \times b = -b \times a$
- $a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$
- $(a \times b) \times c = \langle a, c \rangle b - \langle b, c \rangle a$
- $(a \times b) \times (c \times d) = \det(abc)c - \det(abc)d$
- $\langle (a \times b), c \rangle = \det(abc) = \langle a, (b \times c) \rangle$

# 2 Lineare Algebra

## 2.1 Regeln

Es seien:  $A : m \times n, B : n \times k, B' : n \times k, C : k \times r$

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $A \cdot E_n = A = E_m \cdot A$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $B + B' = B' + B$
- $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$   
 $(B + B') \cdot C = B \cdot C + B' \cdot C$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

## 2.2 LGS-Umformungen

Zulässige Umformungen zum Lösen linearer Gleichungssysteme:

- Zeile mit Konstanten  $\lambda \neq 0$  multiplizieren
- Zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile addieren

- Zeilen vertauschen
- Spalten vertauschen, gleichzeitig entsprechende Zeilen im Variablenvektor vertauschen

## 2.3 Determinanten

**Einheitsdeterminante**  $\det(e_1, e_2 \dots e_n) = 1$

**linear** in jeder Spalte:  $\det(a_1 \dots \lambda a_i \dots a_n) = \lambda \det(a_1 \dots a_i \dots a_n)$

**antikommutativ**  $\det(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n) = -\det(a_1 \dots a_j \dots a_i \dots a_n)$

**Entwicklung** nach  $j$ -ter Spalte:  $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) (-1)^{i+j}$

- $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det(A)$ , mit  $n$ -Spalten ( $m \times n$ -Matrix)
- $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det(A)$
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(E_n) = 1$
- $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- $\det(A+B)$ , laesst sich im allg. nicht durch  $\det(A)$  und  $\det(B)$  ausdrueken

$$8. \det \begin{pmatrix} a_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & a_2 & * & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

$$9. \det \begin{pmatrix} \boxed{A} & 0 \\ 0 & \boxed{B} \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$

1-3: Invertierbare Matrizen sind zum Koerper homomorph.

## 2.4 Definitheit

$$\begin{aligned}
 & A \text{ positiv definit} \iff \\
 & a_{11} > 0 \quad \wedge \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \quad \wedge \quad \det(A) > 0 \\
 & A \text{ negativ definit} \iff -A \text{ positiv definit} \iff \\
 & a_{11} < 0 \quad \wedge \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \quad \wedge \quad \det(A) < 0
 \end{aligned}$$

## 2.5 Lineare Abbildungen, Eigenwerte, Inverse

Zur Berechnung der Eigenwerte einer  $n \times n$ -Matrix betrachtet man (mit einer Variablen  $\lambda$ ) das charakteristische Polynom von  $A$

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E), \quad \lambda \text{ ist Eigenwert von } A \iff \det(A - \lambda E) = 0$$

Zur Berechnung von  $A^n$  wird eine Matrix  $B$  aus den Eigenvektoren gebildet und ihre Inverse  $B^{-1}$ . Dann folgt:

$$B^{-1}AB =: D \Rightarrow A = BDB^{-1} \Rightarrow A^n = (BDB^{-1})^n = BD^nB^{-1}$$

Die Inverse einer Matrix lässt sich über ihre Adjungierte  $\text{adj}(A_{ij}) = A_{ji}$  wie folgt berechnen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

## 3 Ungleichungen

Bernoullische Ungleichung:  $1 + nx \leq (1 + x)^n$  für  $x \geq -1, n \in \mathbb{N}$

Binomische Ungleichung:  $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$   $a, b \in \mathbb{R}$

Archimedisches Prinzip:  $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot b > a$

Dreiecksungleichung:  $|a + b| \leq |a| + |b|$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:  $(\sum_n a_n b_n)^2 \leq \sum_n a_n^2 \cdot \sum_n b_n^2$

$$2n^2 \leq (n+1)^n \quad n^2 \leq 2^n \quad (n \neq 3) \quad 2^{n-1} \leq n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \text{für } a_i > 0$$

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

## 4 Trigonometrisches

deg	rad	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	$\pm\infty$
180°	$\pi$	0	-1	0

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\
 \sin(x) &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \\
 \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\
 \sin(x) \cos(x) &= \frac{1}{2} \sin(2x) \\
 \sin^2(x) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \\
 \cos^2(x) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \\
 \cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1
 \end{aligned}$$

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\sin 4\alpha = 8 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{4 \tan \alpha - 4 \tan^3 \alpha}{1 - 6 \tan^2 \alpha + \tan^4 \alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

### 4.1 Trigonometrie am allg. Dreieck

Sinussatz:  $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

Cosinussatz:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

Tangenssatz:  $\frac{a+b}{a-b} = \tan \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \arctan \frac{\alpha-\beta}{2}$

## 5 Reihen und Folgen

### 5.1 Konvergenzkriterien

#### 5.1.1 Monotoniekriterium

Jede monoton steigende nach oben beschränkte Folge konvergiert.

#### 5.1.2 Majorantenkriterium

Konvergiert die Majorante ( $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit  $a_n \geq |c_n|$ ) einer Folge  $(c_n)$ , so konvergiert auch  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$  absolut.

#### 5.1.3 Verdichtungslemma von Cauchy

Sei  $(c_n)$  eine nicht negative monoton fallende Folge, dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  genau dann wenn die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot c_{2^n}$  konvergiert.

#### 5.1.4 Quotientenkriterium

$\exists \beta < 1 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |c_{n+1}| \leq |c_n| \cdot \beta$  dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$  absolut.

$$\text{d.h.: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \beta$$

$\beta < 1 \Rightarrow$  absolut konvergent

$\beta = 1 \Rightarrow ?$

$\beta > 1 \Rightarrow$  divergent

#### 5.1.5 Wurzelkriterium

$\exists \beta < 1 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : \sqrt[n]{|c_n|} \leq \beta$  dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$  absolut.

#### 5.1.6 Cauchy Kriterium

Eine Folge konvergiert wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall m, n > N_\varepsilon : |a_m - a_n| < \varepsilon$ .

Eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall m > N_\varepsilon \forall k \in \mathbb{N} : \sum_{n=m}^{m+k} a_n < \varepsilon$$

#### 5.1.7 Leibnizkriterium

Ist  $(a_n)$  nicht-negativ und monoton fallend, dann konvergiert die alternierende Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  genau dann wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$  ist.

#### 5.1.8 absolute Konvergenz

Jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Der Grenzwert einer absolut konvergenten Reihe ändert sich durch Umordnen nicht. Der Grenzwert einer bedingt konvergenten Reihe kann durch Umordnung beliebig eingestellt werden.

#### 5.1.9 Grenzwertsatz von Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n} = 0$$

## 5.2 Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(a \cdot n)}{n} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{a^n - 1}{n} = \ln(a)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(1+n)}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x = e^t$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^m}{m!} = 0$$

### 5.2.1 Die L'Hospital-Regel

Falls  $f(x)$  und  $g(x)$  differenzierbar und  $g(x)$  oder  $g(x)'$  ungleich null sind, dann ist:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### 5.3 Wichtige Reihen

- Geometrische Reihe:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ , für  $|x| < 1$   
 Endl. geom. Reihe:  $\sum_{n=0}^k x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ , für  $|x| \neq 1$   
 Harmonische Reihe:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ , konvergent  $\iff x > 1$

#### 5.3.1 Weitere Reihen

$$\sum_{n=0}^k n = \frac{k(k+1)}{2}, \quad \sum_{n=0}^k n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \quad \sum_{n=0}^k n^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

### 5.4 Taylorreihen allg. und speziell

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x-p)^k$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\log(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

### 5.5 Konvergenzradius K bei Potenzreihen

Siehe auch Konvergenzkriterien

$$\frac{1}{K} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

## 6 Differentiation

### 6.1 Allgemeine Regeln

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

### 6.2 Ausgewählte Ableitungen

$f$	$f'$
$x^a$	$ax^{a-1}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a$
$e^{ax}$	$ae^{ax}$
$a^x$	$a^x \ln a$
$\log_a  x $	$\frac{1}{x \ln a}$
$x \ln x - x$	$\ln x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$-\cot x = -\frac{1}{\tan x}$	$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arctan \frac{x}{a}$	$\frac{a}{a^2+x^2}$

## 7 Integration

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

### 7.1 Substitution

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = [F(g(x))]_a^b$$

$$\int f(u(x)) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(u(x)) + C$$

Universalsubstitution für trigonometrische Funktionen:

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

### 7.2 Partielle Integration

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = [F(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x) dx$$

## 8 Mehrdimensionales Differenzieren

### 8.1 Allgemeines

$$f : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = f(x) \quad f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Differenzierbar wenn:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \varphi(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} = 0$$

## 8.2 Vektorfelder im $R^3$ : Divergenz und Rotation

1. Gradient:  $\text{grad}(f(\mathbf{x})) = (f_x, f_y, f_z)$
2. Nabla-Operator:  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$
3. Divergenz:  $\text{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) = \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$
4. Rotation:  $\text{rot}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})$
5. Laplace-Operator:  $\Delta f(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = \text{div}(\text{grad}(f(\mathbf{x}))) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$
6. Rechenregeln fuer  $\nabla$  auf Seite 245 (in ISBN 3-510-67505-1).

## 8.3 Kurvendiskussion im Mehrdimensionalen

1. Stationaere Stellen bestimmen:  $\text{grad}(f(x, y)) = \underline{0}$  loesen.
2. Im 2 dim. Hessematrix bilden:  $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$
3. Stationaere Stellen in  $H_f(S(x, y))$  einsetzen und Definitheit bestimmen.
4. (1)  $H_f$  positiv (negativ) definit  $\Rightarrow$  S lokale Minimum-(Maximum-)Stelle  
(2)  $H_f$  indefinit  $\Rightarrow$  S Sattelpunkt.

## 9 Mehrdimensionales Integrieren

### 9.1 Kurvenintegrale

1. Einer skalaren Funktion:  $\int_{\mathbf{w}} f ds = \int_a^b f(\mathbf{w}(t)) |\dot{\mathbf{w}}(t)| dt$   
mit  $\mathbf{w}(t) = (x, y, z)^T$ ,  $a \leq t \leq b$ ,  $ds = |\dot{\mathbf{w}}(t)| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$

- Bogenlänge:  $L(\mathbf{w}) = \int_{\mathbf{w}} ds$
- Momente:  $M_{x,k} = \int_{\mathbf{w}} x^k dm = \int_{\mathbf{w}} x^k \rho(x, y, z) ds$ ,  
für  $k = 1$  statische, und  $k = 2$  Trägheitsmomente.
- Gesamtmasse:  $M = \int_{\mathbf{w}} \rho ds$
- Schwerpunkt:  $x_s = M^{-1} \int_{\mathbf{w}} x dm$ ,  $\bar{x} = L^{-1} \int_{\mathbf{w}} x ds$

2. Eines Vektorfeldes:  $\int_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{w}(t)) \cdot \dot{\mathbf{w}}(t) dt$   
mit  $\mathbf{w}(t) = (x, y, z)^T$ ,  $a \leq t \leq b$ ,  $d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{w}}(t) dt = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T dt$   
 $\Rightarrow \int_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b [v_1(x)\dot{x} + v_2(y)\dot{y} + v_3(z)\dot{z}] dt$

- Arbeit:  $A = \int_{\mathbf{w}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$ , mit der Kraft  $\mathbf{K}$
- Zirkulation des Feldes  $\mathbf{v}$  längs  $\mathbf{w}$ :  $\oint_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$
- Fluss des Feldes  $\mathbf{v}$  durch  $\mathbf{w}$ :  $\oint_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{n}$ , mit  $d\mathbf{n} = (\dot{y}, -\dot{x})^T$

## 9.2 Doppelintegrale

### 9.2.1 Ebene Normalbereiche

$$I = \iint_B f(x, y) = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{g(x)}^{h(x)} \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

$B$  muss als Normalbereich vom Typ I oder II dargestellt werden, ggf. kann  $B$  durch achsenparallele Schnitte in Normalbereiche ( $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$ ) zerlegt werden.  $I$  ergibt sich dann durch Addition der Einzelintegrale:  $I = I_1 + \dots + I_n$ .

### 9.2.2 Ebener Satz von Green und Gauss

$$\text{Green: } \oint_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \iint_B \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\text{Gauss: } \oint_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{u} = \iint_B \text{div } \mathbf{v} dx dy$$

### 9.2.3 Die Transformationsformel für ebene reguläre Bereiche

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

$$\text{mit } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| := \det \begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix} \text{ (Jakobi-Determinante)}$$

Geeignet für Koordinatentransformation von kartesischen Koordinaten nach z.B. affinen-, polar- oder elliptischen Koordinaten.

Sonderfall Polarkoordinaten:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

### 9.2.4 (Ober-)Flächenintegrale im Raum

1. Einer skalaren Funktion:

$$I = \iint_S f dO$$

(a) Parameterdarstellung und Parameterbereich angeben.

(b) Die partiellen Ableitungen  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  und das Oberflächenelement  $dO = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| du dv$  berechnen.

Ist das Oberflächenelement Flächentreu so gilt:  $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = 1$ . Für ein Winkeltreues  $dO$  muss gelten:  $(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) = 0$ .

(c) Eintragen und ebenes Doppelintegral über  $D$  ausrechnen:

$$I = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| du dv$$

mit  $f(x, y, z) = 1$  für den Flächeninhalt und  $f = (x^2 + y^2)$  für das Trägheitsmoment.

2. Eines Vektorfeldes (Fluss von  $\mathbf{v}$  durch  $S$ )

$$\iint_S \mathbf{v}^T \cdot dO := \iint_S (\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{n}) dO = \iint_D \mathbf{v}^T \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) du dv$$

$$\text{mit } \mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$$

### 9.2.5 Der Satz von Stokes

$$\oint_{\partial S} \mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{v} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^T dO = \iint_D (\text{rot } \mathbf{v})^T \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) du dv$$

## 9.3 Volumenintegrale, Dreifachintegrale

### 9.3.1 Parametrisierung

$$\iiint_V f(x, y, z) dV$$

Das äussere Integral hat stets feste Grenzen! Dreifachintegrale lassen sich als Produkt dreier Einfachintegrale darstellen, es gelten folgende Koordinatentransformationen für die Parametrisierung:

1. **Kartesische Koordinaten:**  $dV = dz dy dx$

$$a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$$

2. **Zylinder-Koordinaten:**  $dV = r dr d\varphi dz$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z, \text{ für } 0 \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

3. **Kugel-Koordinaten:**  $dV = r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\varphi$   
 $x = r \sin \phi \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \phi \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \phi$   
für  $0 \leq r$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

4. **allgemeine Koordinaten:**  
 $dV = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du \, dv \, dw$

### 9.3.2 Der Divergenzatz von Gauss

$$\iiint_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \iint_{\partial B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dO$$

## 10 Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 10.1 Exakte Differentialgleichungen

Haben die Form:  $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$ . Zuerst muss die Exaktheit überprüft werden:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

Dann wird über den Ansatz  $U_x = A$  und  $U_y = B$  eine Stammfunktion (siehe 11.5) bestimmt:

$$U(x, y) = \int A(x, y) \, dx + c(y) \quad \text{oder:} \quad U(x, y) = \int B(x, y) \, dy + c(x)$$

Die allgemeine implizite Lösung ist  $U(x, y) = \text{const.}$  Die implizite Lösung  $U(x, y) = U(x_0, y_0)$  (Def.-Bereich bestimmen und wenn möglich auflösen nach  $y$ ).

#### 10.1.1 Euler-Multiplikator

Falls eine DGL der Form  $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$  *nicht* exakt ist ( $A_y \neq A_x$ ) so kann dennoch mittels eines integrierenden Faktors  $M(x, y) = m(u(x, y))$  eine exakte DGL erzeugt werden die genau dieselben Lösungen besitzt wie die ursprüngliche DGL:

$$M(x, y)A(x, y) + M(x, y)B(x, y)y' = 0$$

$M(x, y)$  kann über Standardansätze für  $u(x, y)$  ermittelt werden:

$u(x, y)$	$\frac{H(x, y)}{A_y - B_x}$	$u(x, y)$	$\frac{H(x, y)}{B - A}$	$u(x, y)$	$\frac{H(x, y)}{2(xB - yA)}$
$x$	$\frac{A_y - B_x}{B}$	$x + y$	$\frac{A_y - B_x}{B - A}$	$x^2 + y^2$	$\frac{A_y - B_x}{2(xB - yA)}$
$y$	$\frac{A_y - B_x}{-A}$	$x - y$	$\frac{A_y - B_x}{B + A}$	$x^2 - y^2$	$\frac{A_y - B_x}{2(xB + yA)}$

Falls  $H(x, y) := \frac{A_y - B_x}{Bu_x - Au_y} \stackrel{!}{=} h(u(x, y))$  wurde der richtige Ansatz gewählt. Nun kann  $m(u) = e^{\int h(u) du}$  berechnet und die nun exakte DGL gelöst werden.

### 10.2 Integration durch Substitution

Übergang zu neuen Variablen bzw. herabsetzen der Ordnung einer DGL.

#### 10.2.1 Substitutionen

Form der DGL	Substitution
$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$u = \frac{y}{x} \Rightarrow u'(x) = \frac{f(u) - u(x)}{x}$ , $f(u) = y'$
$y' = f(ax + by + c)$	$u = ax + by + c \Rightarrow u'(x) = a + bf(u)$
$y' = y^2 f(xy)$	$u = xy \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}(u + u^2 f(u))$
$yy' = f\left(\frac{y^2}{x}\right)$	$u = \frac{y^2}{x} \Rightarrow u'(x) = \frac{2f(u) - u}{x}$
$y' + \frac{y}{x} = \varphi(x)f(xy)$	$u = xy \Rightarrow u'(x) = (x\varphi(x))f(u)$

#### 10.2.2 Die Bernoulli-Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x)y^n$$

Substitution:  $u(x) = y(x)^{1-n} \rightarrow u' = (1-n) \cdot y^{(-n)} \cdot y'$  und Übergang zu:

$$u' + (1-n)a(x)u = (1-n)b(x)$$

Man bestimmt die allg. Lösung  $u = u(x)$  der DGL und macht die Substitution rückgängig:  $y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-n}}$ .

### 10.3 Die Laplace-Transformation

Regel	$F(s)$	$f(t)$
Def.	$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, s \in \mathbb{C}$	$f(t)$
Linearität	$aF(s) + bG(s), a, b \in \mathbb{R}$	$af(t) + bg(t)$
Faltung	$F(s) \cdot G(s)$	$f * g := \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$
Ableitung	$s^n F(s) - s^{n-1}c_0 - \dots - c_{n-1}$	$f^{(n)}(t)$
	$F'(s)$	$-t f(t)$
Integration	$\frac{1}{s} F(s)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$
	$\int_s^\infty F(x) dx$	$\frac{1}{t} f(t)$
Verschieb.	$F(s+a)$	$e^{-at} f(t)$

#### 10.3.1 Ausgewählte Transformationen

$n, a \in \mathbb{N}$

$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$
$e^{-as}$	$\delta(t-a)$	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \sin(at)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a} \sinh(at)$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a} (1 - \cos(at))$
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{at - \sin(at)}{a^3}$

### 10.4 DGL-Systeme

Lösungsverfahren für  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  über die Eigenwerte. Alternativ kann auch Laplace-Trafo verwendet werden, falls die Anfangswerte bekannt sind oder schon anfangs in die Rechnung mit eingehen dürfen.

Lösung des homogenen DGL-Systems:

1. Eigenwerte berechnen:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

2. Eigen- und Hauptvektoren ( $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ) von  $A$  bestimmen.

3. Fundamentallösungen  $\mathbf{x}_i(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}_i$  berechnen und als Fundamentalmatrix  $X(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t))$  zusammenfassen.

Allgemeine komplexe Lösung ist:

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \dots, c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$$

4. Allgemeine reelle Lösungsbasis: Ist  $\mathbf{x}(t)$  Lösung zu  $\lambda \notin \mathbb{R}$ , so sind  $\text{Re}\{\mathbf{x}(t)\}$  und  $\text{Im}\{\mathbf{x}(t)\}$  Basislösungen zu  $\lambda$ .

Lösung des inhomogenen DGL-Systems:

1. Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems nach einer der folgenden Methoden ermitteln:

Ansatz "vom Typ der rechten Seite", Laplace-Trafo, Variation der Konstanten oder nach der Eliminationsmethode.

Hier ein Rechenchema nach der Methode der Variation der Konstanten:

- (a) Ansatz  $\mathbf{x}_p(t) = X(t)\mathbf{c}(t)$  (reelle Lösungsbasis mit neuen Konstanten  $\mathbf{c}$  multiplizieren und mit  $\mathbf{b}(t)$  gleichsetzen).

- (b)  $X(t)$  in Dreiecksgestalt umformen und sukzessive ("von unten") lösen. Konstanten  $\mathbf{c}$  der partikulären Lösung über Integration von  $\mathbf{c}$  bestimmen und in  $\mathbf{x}_p(t) = X(t)\mathbf{c}(t)$  einsetzen.

2. Partikuläre Lösung zur allg. Lösung zusammensetzen:

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t), \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

3. AWP  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Vektor  $\mathbf{c} = X(t_0)^{-1} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}f_{x_p}(t_0))$  ausrechnen.

### 10.4.1 Die Matrix-Exponentialfunktion und Resolvente

Es gilt:  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ ,  $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$ .

Damit besitzt das homogene lineare DGL-System  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  die vollständige allg. Lösung:  $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$ .

Die Resolvente zu  $A$  ist definiert als:  $R(s) := (sE_n - A)^{-1}$  und wird zur Lösung von DGL-Systemen im Laplace-Bereich verwendet. Aus der Resolvente ergibt sich durch Laplace-Rücktrafo die Exponentialfunktion  $e^{tA}$ .

Beispiel:  $\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{c}\} : (sE_n - A) \cdot F(s) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}$

### 10.5 Lineare inhomogene DGLn $n$ -ter Ordnung

mit der Form:  $L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(x)$

1. Fundamentalsystem der homogenen DGL ( $b = 0$ ) bestimmen. Dies kann auf mehreren Arten geschehen:

- Über Überführung in das äquivalente DGL-System und lösen entsprechend (10.4).
- Über Laplace-Trafo, falls die Anfangswerte bekannt sind.
- Über Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $P(\lambda)$ . Für jede  $k$ -fache Nullstelle wird  $e^{\lambda x}, \dots, k^{k-1}e^{\lambda x}$  als Lösungsbasis genommen. Für jedes Paar  $k$ -facher konjugiert komplexer Nullstellen ( $\alpha = \text{Re}\{\lambda\}$ ,  $\beta = \text{Im}\{\lambda\} \neq 0$ ) erhält man jeweils  $x^{k-1}e^{\alpha x} \cos \beta x$  und  $x^{k-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$

2. Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL bestimmen durch Variation der Konstanten oder spezielle Ansätze. Hier eine (kleine) Auswahl an Ansätzen für die Störfunktion  $b(x)$  ohne Komplexifizierung:

$$b(x) = P_n(x) \Rightarrow y_p(x) = Q_n(x), b \neq 0, y_p(x) = x^n Q_n(x), b = 0, a \neq 0$$

$$b(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x) \Rightarrow y_p(x) = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) = ae^{ci x}$$

$$b(x) = e^{cx} \Rightarrow y_p(x) = x^k A e^{cx}, \text{ mit der } k\text{-fachen Lösung } x \text{ der char. Gl.}$$

Beispiele:

$$b(x) = e^{-2x} + x e^{-2x}, \text{ mit } k = 2 \Rightarrow y_p(x) = x^2 (A e^{-2x} + B x e^{-2x})$$

$$b(x) = x^m e^{-x} \sin(x) = x^m e^{(-1+i)x} \Rightarrow y_p = x(a_0 + \dots + a_m x^m) e^{(-1+i)x}$$

### 10.6 Stabilität

#### 10.6.1 Von Autonomen Systemen

Stabilität von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

- Alle Gleichgewichtslagen  $\mathbf{a}$  von  $\mathbf{v} = 0$  bestimmen.
- Die Jacobi-Matrix  $J_v(\mathbf{x})$  berechnen.
- Für jedes  $\mathbf{a}$  Eigenwerte  $\lambda_k$  von  $A := J_v(\mathbf{x})$  berechnen.
  - $\text{Re}\{\lambda_k\} < 0, \forall k \Rightarrow \mathbf{a}$  asymptotisch stabil.
  - $\text{Re}\{\lambda_k\} > 0$ , für min. ein  $k \Rightarrow \mathbf{a}$  instabil.
  1. Fall.  $\mathbf{v}(x) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  (linear):  $\text{Re}\{\lambda_k\} \leq 0, \forall k$  und zu jedem Eigenwert  $\lambda$  mit  $\text{Re}\{\lambda_k\} = 0$  und Vielfachheit  $l$  ist  $\text{Rang}(A - \lambda E) = n - l \Rightarrow \mathbf{a}$  stabil.  
2. Fall. Für andere Systeme keine weitere Aussage.

#### 10.6.2 Routh-Hurwitz-Kriterium

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Ein Polynom  $P(\lambda)$  ist stabil, wenn alle seine Nullstellen negativen Realteil besitzen  $\Leftrightarrow$  ein Polynom  $n$ -ter Ordnung ist dann stabil, wenn alle Koeffizienten der charakteristischen Gleichung und die folgenden  $n$  Determinanten Werte grösser Null haben:

$$a_1 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0$$

Ausgerechnet ergibt dies folgende Bedingungen für ein System bis zur 4-ten Ordnung:  $a_i > 0 \wedge a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0 \wedge a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$ .

## 11 Sonstiges

### 11.1 Quadratische Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

### 11.2 Kubische Gleichungen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{x=z-\frac{a}{3}}, z^3 + pz + q$$

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

### 11.3 Umformung einer Funktion in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + 2d \cdot xy + 2e \cdot xz + 2f \cdot yz + g \cdot x + h \cdot y + i \cdot z + l \\ &= \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} + \underline{a}^T \cdot \underline{x} + a_0 \\ &= (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (g \ h \ i) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + l \end{aligned}$$

### 11.4 Partialbruchzerlegung

Ansätze zur Koeffizientenbestimmung bei Partialbrüchen, es seien  $R(x), Q(x)$  reelle Polynome mit  $\text{Grad } R < \text{Grad } Q$ . Lösung über Koeffizientenvergleich.

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R_1}{x-r} + \frac{R_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{R_m}{(x-r)^m} + \dots + \frac{A_1x + B_1}{(x^2 + 2ax + b)} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{(x^2 + 2ax + b)^m} + \dots$$

### 11.5 Bestimmung eines Potentials

1. Ansatz:  $f_x = v_1, f_y = v_2, f_z = v_3$ .  $G$  muss einfach zusammenhängend sein! Weitere Bedingung:  $\text{rot}(v) = 0$ .
2. Durch unbestimmte Integration nach  $x$  bei konstantem  $y$  und  $z$   $f_x = v_1$  lösen:

$$f(x, y, z) = \int v_1(x, y, z) dx + c(y, z)$$

3. Die eben ermittelte Stammfunktion  $f$  nach  $y$  partiell ableiten und durch gleichsetzen mit  $f_y = v_2$   $c'(x,y)$  bestimmen:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int v_1(x, y, z) dx + c(y, z) = f_y = v_2$$

Falls hier noch  $x$  auftritt, so ist  $\text{rot}(v) \neq 0$  und es existiert kein Potential!

4. Durch unbestimmte Integration nach  $y$   $c(y, z)$  aus  $c_y(y, z) = h(y, z)$  bestimmen:

$$c(y, z) = \int h(y, z) + d(z)$$

und in die oben ermittelte Stammfunktion eintragen:

$$f(x, y, z) = \int v_1(x, y, z) dx + \int h(y, z) + d(z)$$

5. Durch partielle Differentiation von  $f$  nach  $z$  und durch gleichsetzen mit  $f_z = v_3$   $d'(z)$  bestimmen. Falls hier noch  $y$  auftritt, so ist  $\text{rot}(v) \neq 0$ !
6.  $d(z)$  durch unbestimmte Integration nach  $z$  bestimmen und oben eintragen, fertig!