1 Kreuzprodukt

1. $\lambda a \times b = \lambda(a \times b) = a \times \lambda b$
2. $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$ und $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$
3. $a \times b = -b \times a$
4. $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle\, b - \langle a, b\rangle\, c$
5. $(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle\, b - \langle b, c\rangle\, a$
6. $(a \times b) \times (c \times d) = \det(abd)c - \det(abc)d$
7. $\langle (a \times b), c\rangle = \det(abc) = \langle a, (b \times c)\rangle$

2 Lineare Algebra

2.1 Regeln

Es seien: $A : m \times n, \quad B : n \times k, \quad B' : n \times k, \quad C : k \times r$

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. $A \cdot E_n = A = E_m \cdot A$
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
4. $B + B' = B' + B$
5. $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$
   $(B + B') \cdot C = B \cdot C + B' \cdot C$
6. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
7. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

2.2 LGS-Umformungen

Zulässige Umformungen zum Lösen linearer Gleichungssysteme:

- Zeile mit Konstanten $\lambda \neq 0$ multiplizieren
- Zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile addieren
- Zeilen vertauschen
- Spalten vertauschen, gleichzeitig entsprechende Zeilen im Variablenvektor vertauschen

2.3 Determinanten

Einheitsdeterminante $\det(e_1, e_2 \dots e_n) = 1$

linear in jeder Spalte: $\det(a_1 \dots \lambda a_i \dots a_n) = \lambda \det(a_1 \dots a_i \dots a_n)$

antikommutativ $\det(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n) = -\det(a_1 \dots a_j \dots a_i \dots a_n)$

Entwicklung nach j-ter Spalte: $\det(A) = \sum_{i=0}^{n} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})(-1)^{i+j}$

1. $\det(-A) = (-1)^n \cdot \det(A)$, mit n-Spalten ($m \times n$-Matrix)
2. $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det(A)$
3. $\det(A) = \det(A^{\mathrm{T}})$
4. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
5. $\det(E_n) = 1$
6. $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
7. $\det(A+B)$, laesst sich im allg. nicht durch $\det(A)$ und $\det(B)$ ausdrueken
8. $\det \begin{pmatrix} a_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$
9. $\det \begin{pmatrix} \boxed{A} & 0 \\ 0 & \boxed{B} \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$

1-3: Invertierbare Matrizen sind zum Koerper homomorph.

2.4 Definitheit

$$
\begin{array}{lllll}
A & \text{positiv definit} \iff & & & \\
a_{11} > 0 & \wedge & \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 & \wedge & \det(A) > 0 \\
A & \text{negativ definit} \iff & & & \\
-A & \text{positiv definit} \iff & & & \\
a_{11} < 0 & \wedge & \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 & \wedge & \det(A) < 0
\end{array}
$$

2.5 Lineare Abbildungen und Eigenwerte

Zur berechnung der Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix betrachtet man (mit einer Variablen λ das charakteristische Polynom von A

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$$

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

Zur berechnung von A^n wird eine Matrix B aus den Eigenvektoren gebildet und ihre Inverse B^{-1}. Dann folgt:

$$B^{-1}AB =: D \Rightarrow A = BDB^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = (BDB^{-1})^n = BD^nB^{-1}$$

3 Ungleichungen

$$
\begin{aligned}
\text{Bernoullische Ungleichung:} \quad & 1 + nx \leq (1+x)^n \text{ für } x \geq -1, n \in N \\
\text{Binomische Ungleichung:} \quad & |ab| \leq \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \qquad a, b \in R \\
\text{Archimedisches Prinzip:} \quad & \forall a \in R \forall b \in R^+ \exists n \in N : n \cdot b > a \\
\text{Dreiecksungleichung:} \quad & |a + b| \leq |a| + |b| \\
\text{Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:} \quad & \left(\textstyle\sum_n a_n b_n\right)^2 \leq \textstyle\sum_n a_n^2 \cdot \sum_n b_n^2
\end{aligned}
$$

$$2n^2 \leq (n+1)^n \qquad n^2 \leq 2^n \ (n \neq 3) \qquad 2^{n-1} \leq n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad \text{für } a_i > 0$$

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

4 Trigonometrisches

deg	rad	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	$\pm\infty$
180°	π	0	-1	0

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\
\sin(x) &= \tfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \\
\cos(x) &= \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\
\sin(x)\cos(x) &= \tfrac{1}{2}\sin(2x) \\
\sin^2(x) &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \\
\cos^2(x) &= \tfrac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \\
\cos^2(x) + \sin^2(a) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} & \cos x &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \\
\sin\tfrac{\alpha}{2} &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha)} & \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos\tfrac{\alpha}{2} &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos\alpha)} & \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\tan\tfrac{\alpha}{2} &= \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} & \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \\
\sin 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha & \sin 4\alpha &= 8\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha \\
\cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha & \cos 4\alpha &= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 \\
\tan 3\alpha &= \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} & \tan 4\alpha &= \frac{4\tan\alpha - 4\tan^3\alpha}{1 - 6\tan^2\alpha + \tan^4\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta & \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} & \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}
\end{aligned}
$$

5 Reihen und Folgen

5.1 Konvergenzkriterien

5.1.1 Monotoniekriterium

Jede monoton steigende nach oben beschränkte Folge konvergiert.

5.1.2 Majorantenkriterium

Konvergiert die Majorante ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq |c_n|$) einer Folge (c_n), so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ absolut.

5.1.3 Verdichtungslemma von Cauchy

Sei (c_n) eine nicht negative monoton fallende Folge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ genau dann wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot c_{2^n}$ konvergiert.

5.1.4 Quotientenkriterium

$\exists\beta < 1 \exists N \in N \forall n > N : |c_{n+1}| \leq |c_n| \cdot \beta$ dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ absolut.

$$\text{d.h.: } \lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \beta$$

$$\begin{aligned} \beta &< 1 \Rightarrow && \text{absolut konvergent} \\ \beta &= 1 \Rightarrow && ? \\ \beta &> 1 \Rightarrow && \text{divergent} \end{aligned}$$

5.1.5 Wurzelkriterium

$\exists\beta < 1 \exists N \in N \forall n > N : \sqrt[n]{|c_n|} \leq \beta$ dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ absolut.

5.1.6 Cauchykriterium

Eine Folge konvergiert wenn $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in N\ \forall m, n > N_\varepsilon : |a_m - a_n| < \varepsilon$.
Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann wenn
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in N\ \forall m > N_\varepsilon \forall k \in N : \sum_{n=m}^{m+k} a_n < \varepsilon$

5.1.7 Leibnizkriterium

Ist (a_n) nicht-negativ und monoton fallend, dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ genau dann wenn $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$ ist.

5.1.8 absolute Konvergenz

Jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Der Grenzwert einer absolut konvergenten Reihe ändert sich durch Umordnen nicht. Der Grenzwert einer bedingt konvergenten Reihe kann durch Umordnung beliebig eingestellt werden.

5.1.9 Grenzwertsatz von Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n} = 0$$

5.2 Einige Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} &= \frac{1}{e} \\ \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n &= e^x \\ \lim_{n\to 0} \frac{sin(a \cdot n)}{n} &= a \\ \lim_{n\to 0} \frac{a^n - 1}{n} &= ln(a) \\ \lim_{n\to 0} \frac{ln(1+n)}{n} &= 1 \end{aligned}$$

5.3 Wichtige Reihen

5.3.1 Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{fuer } |x| < 1$$

5.3.2 Endliche geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{k} x^n \quad = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k \quad = \frac{1 - x^{k+1}}{1-x}, \qquad \text{fuer } |x| \neq 1$$

5.3.3 Harmonische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots \qquad \text{konvergent} \iff x > 1$$

5.3.4 Weitere Reihen

$$\sum_{n=0}^{k} n = \tfrac{k(k+1)}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\sum_{n=0}^{k} n^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

5.4 Taylorreihen allg. und speziell

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \log(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

5.5 Konvergenzradius K bei Potenzreihen

Siehe auch Konvergenzkriterien

$$\frac{1}{K} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

6 Differentiation

6.1 allgemeine Regeln

$$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x) \qquad (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

6.2 Ausgewählte Ableitungen

f	f'
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	x^α
e^{ax}	ae^{ax}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$x\ln x - x$	$\ln x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$-\cot x = -\frac{1}{\tan x}$	$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arctan \frac{x}{a}$	$\frac{a}{a^2+x^2}$

7 Integration

7.1 Substitution

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y = [F(g(x))]_a^b$$
$$\int f(u(x))\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C = F(u(x)) + C$$

Universalsubstitution für trigonometrische Funktionen:

$$t = \tan\frac{x}{2} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

7.2 Partielle Integration

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x = [F(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)\cdot g'(x)\mathrm{d}x$$

8 Mehrdimensionales Differenzieren

8.1 Allgemeines

$$f: x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2 \dots x_n) \\ f_2(x_1, x_2 \dots x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2 \dots x_n) \end{pmatrix} = f(x) \qquad f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Differenzierbar wenn:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \varphi(h) \quad \text{mit} \lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} = 0$$

8.2 Vektorfelder im R^3: Divergenz und Rotation

1. Gradient: $grad(f(\vec{x})) = (f_x, f_y, f_z)$
2. Nabla-Operator: $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$
3. Divergenz: $div(\vec{F}(\vec{x})) = \nabla \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$
4. Rotation: $rot(\vec{F}(\vec{x})) = \nabla \times \vec{F}(\vec{x})$
5. Laplace-Operator: $\Delta f(\vec{x}) = \nabla \cdot \nabla f(\vec{x}) = div(grad(f(\vec{x}))) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$
6. Rechenregeln fuer ∇ auf Seite 245 (in ISBN 3-510-67505-1).

8.3 Kurvendiskusssion im Mehrdimensionalen

1. Stationaere Stellen bestimmen: $grad(f(x,y)) = \vec{0}$ loesen.
2. Im 2 dim. Hessematrix bilden: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$
3. Stationaere Stellen in $H_f(S(x,y))$ einsetzen und Definitheit bestimen.
4. (1) H_f positiv (negativ) definit $\Rightarrow$ S lokale Minimum-(Maximum-)Stelle
(2) H_f indefinit $\Rightarrow$ S Sattelpunkt.

9 Sonstiges

9.1 Quadratische Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

9.2 Kubische Gleichungen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{x = z - \frac{a}{3}} z^3 + pz + q$$
$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

9.3 Umformung einer Funktion in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= a\cdot x^2 + b\cdot y^2 + c\cdot z^2 + 2d\cdot xy + 2e\cdot xz + 2f\cdot yz + g\cdot x + h\cdot y + i\cdot z + l \\ &= \vec{x}^T\cdot A\cdot\vec{x} + \vec{a}^T\cdot\vec{x} + a_0 \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + l \end{aligned}$$